第14講　グラフを描く

14

［A］　次のグラフを描け.

（1）　$y=\dfrac{\log(x+1)}{x}$

（2）　$y=x^2-2^x$

［B］　$(x,\ y)=(\cos 2t,\ t\sin t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ で定められる曲線を描け.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　グラフを描く

14　次のグラフを描け.

(1)　$y=x\log x-(x-1)\log(x+1)$

(2)　$(x,\ y)=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$　$(0\leqq t\leqq\pi)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　グラフを描く

14

［A］ 次のグラフを描け.

(1) $y=\dfrac{\log(x+1)}{x}$

(2) $y=x^2-2^x$

［B］ $(x,\ y)=(\cos 2t,\ t\sin t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ で定められる曲線を描け.

【答】 略

【解説】

［A］(1) $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ とおくと $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2}$ となる.

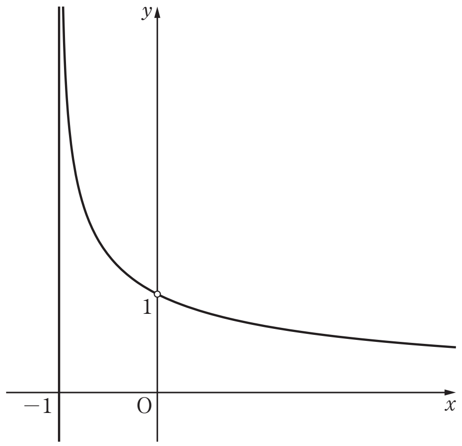
この分子を $g(x)$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$ であり，これと $g(0)=0$ より $g(x)$ の増減は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	0	↘	

となる．これと $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)=-\frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=1$ などより，$f(x)$ の増減は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$	$-$	
$f(x)$	∞	↘	(1)	↘	0

となるので，求めるグラフは下図.



(2)　$f(x)=x^2-2^x$ とおくと $f'(x)=2x-(\log 2)2^x$，$f''(x)=2-(\log 2)^2 2^x$ である．

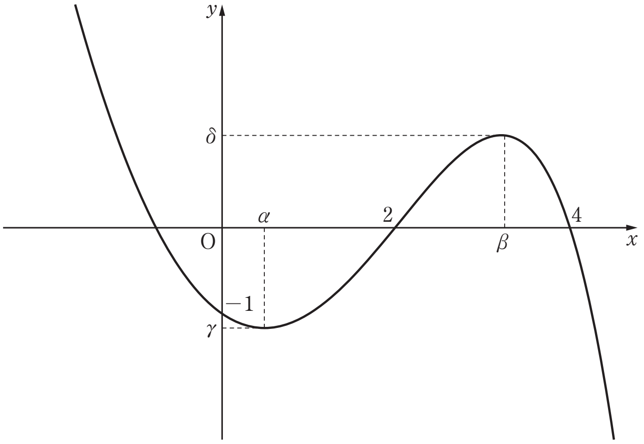
ここで $f''(x)$ は単調減少関数で $\lim_{x\to\infty} f''(x)=-\infty$，$\lim_{x\to-\infty} f''(x)=2$ より $f''(x)=0$ の実数解はただ１つだけ存在し，それを x_0 とおく．このとき $f'(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	x_0	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

であり，$f'(0)=-\log 2<0$，$f'(1)=2-2\log 2>0$，$f'(3)=6-8\log 2>0$，$f'(4)=8-16\log 2<0$ より $f'(x)=0$ の実数解は $0<x<1$，$3<x<4$ の区間にそれぞれ１つずつ存在し，それらを小さい順に α，β とおくと $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	γ	$\nearrow$	δ	$\searrow$	$-\infty$

となるので，求めるグラフは下図．



［B］　$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(-2\sin 2t,\ \sin t+t\cos t)$ より増減は

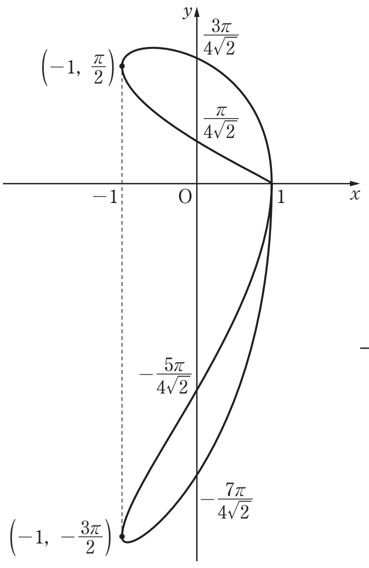
t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
x'	(0)	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	(0)
y'	(0)	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(-1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$	$\nearrow$		$\searrow$	$(1,\ 0)$	$\swarrow$	$\left(-1,\ -\dfrac{3\pi}{2}\right)$	$\searrow$		$\nearrow$	$(1,\ 0)$

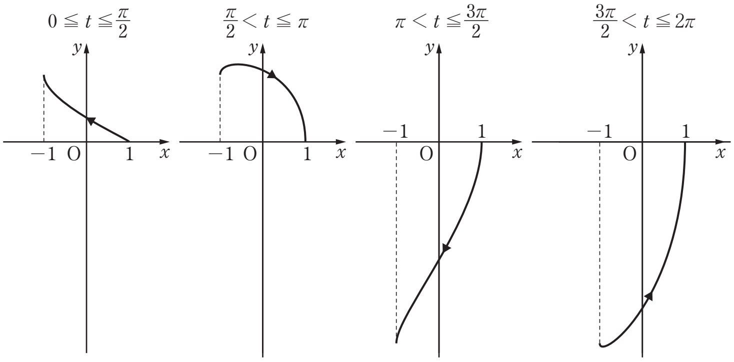
となる（ただし α と β は $\tan t+t=0$ $(0<\alpha<\beta<2\pi)$ を満たす実数）．

よって，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin t+t\cos t}{2\sin 2t}$ に注意すると，グラフは以下の通り．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。





ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　グラフを描く

14　次のグラフを描け.

(1)　$y=x\log x-(x-1)\log(x+1)$

(2)　$(x,\ y)=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$　$(0\leqq t\leqq\pi)$

【答】　略

【解説】

(1)　$f(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$ とおくと

$f'(x)=\log x-\log(1+x)+\dfrac{2}{x+1}$, $f''(x)=\dfrac{1-x}{x(1+x)^2}$ であり,

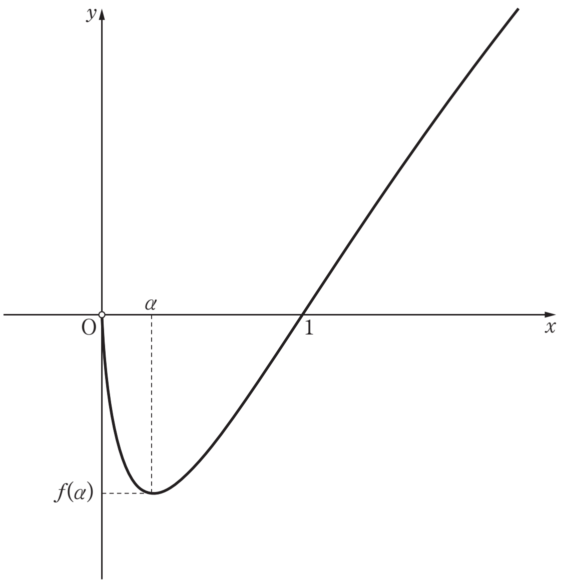
$\lim_{x\to+0}f'(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ より $f'(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	正	↘	0

となるので, $f'(x)=0$ は $x>0$ に実数解をただ 1 つだけもち, それを α とおくと, $0<\alpha<1$ を満たす. このとき

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	(0)	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	∞

となるので, グラフは下図.

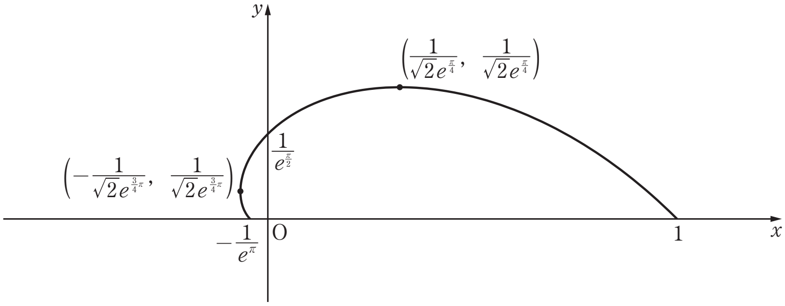


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\dfrac{5}{4}\pi\right),\ \sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\dfrac{3}{4}\pi\right)\right)$ より増減は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
x'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}}\right)$	$\swarrow$	$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}}\right)$	$\searrow$	$\left(-\dfrac{1}{e^{\pi}},\ 0\right)$

となるので，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}$ に注意すると，グラフは下図.



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。